数理解析研究所講究録 1289 巻 2002 年 64-80

半群環の微分作用素環–その有限性–

北海道大学・大学院理学研究科　齋藤　睦 (SAITO, Mutsumi)
US Naval Academy　William N. TRAVES

August 30, 2002

Abstract

We prove that the ring of differential operators of a scored semigroup algebra and its graded algebra with respect to order (of differential operators) are finitely generated.

1 序

代数多様体上の微分作用素環の理論は、非特異のときはいわゆる D-加群の理論として活発に研究されてきたが、特異点があるときは、その難しさの故かあまり研究されていないと言って良い。

我々著者二人は異なる動機から半群環の微分作用素環を研究し始めた。齋藤は A-超幾何微分方程式系においてその隣接作用素のなす代数が本質的に半群環の微分作用素環と同一であったため、この研究に入り込んだ。Traves は特異点の研究とくに、特異点を有する代数多様体上の微分作用素環の代数的性質と特異点の性格との関連に興味がある。アフィントーリック多様体上の (= 半群環の) 微分作用素環は計算可能なモデルケースである。

我々は前の論文 [5] において、半群環 $R_A = \mathbf{C}[\mathbf{N}A]$ の微分作用素環 $D(R_A)$ の有限性に関する問題を提起し、微分作用素の階数に関する次数環 $\mathrm{Gr}D(R_A)$ が有限生成なら半群 $\mathbf{N}A$ は「scored」(§6 参照) になることを示した。本小論ではこの逆 : $\mathbf{N}A$ が scored なら $\mathrm{Gr}D(R_A)$ は有限生成を示す。証明は、生成系を構成していく方法なので、生成系を理論的には計算できる形ではあるが、現実には polytope 内の格子点全ての列挙 (= 整数計画法の feasible solutions の列挙) など難しいところもある。

また本小論では、性質「scored」と Cohen-Macaulay 性などとの比較も例を挙げることにより行う。

2 諸定義

さて、$\mathbf{N}$ を 0 以上の整数全体の集合とする。また、

$$A := \{\, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \,\}, \qquad \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{dj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

を $\mathbf{Z}^d$ の有限集合とする。簡単のため、$\mathbf{Z}A = \mathbf{Z}^d$ と仮定する。但し、$\mathbf{Z}A$ は、A が生成する加群、即ち、

$$\mathbf{Z}A = \mathbf{Z}\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{Z}\mathbf{a}_n$$

とする。また、$\mathbf{N}A$ を A の生成する monoid とし、$R := R_A$ をその半群環で、Laurent 多項式環 $\mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}]$ の部分環とみなす。即ち、

$$\mathbf{N}A = \mathbf{N}\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{N}\mathbf{a}_n,$$

$$\begin{aligned} R := R_A &:= \mathbf{C}[\mathbf{N}A] \\ &= \mathbf{C}[t^{\mathbf{a}_1}, \ldots, t^{\mathbf{a}_n}] \\ &\subset \mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}] = \mathbf{C}[\mathbf{Z}^d] =: \mathbf{C}[t^{\pm 1}] \end{aligned}$$

ここで、multi-index notation $t^{\mathbf{a}_j} = t_1^{a_{1j}} \cdots t_d^{a_{dj}}$ を使った。

$\mathcal{F}$ を錘 $\mathbf{R}_{\geq 0}A$ の facet(余次元 1 の面) 全体の集合とする。$\sigma \in \mathcal{F}$ に対して、h_σ を次で一意的に決まる $\mathbf{R}^d$ 上の 1 次形式とする：

1. $h_\sigma(\mathbf{R}_{\geq 0}A) \geq 0$,
2. $h_\sigma(\sigma) = 0$,
3. $h_\sigma(\mathbf{Z}^d) = \mathbf{Z}$.

有限集合 $A = \{\, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \,\}$ をしばしば行列 $A = (\, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \,)$ のように書く。

例 2.1 $d = n = 1$, $A = (1)$. このとき、$\mathcal{F} = \{\, 0 \,\}$ で、$h_{\{0\}}(\theta) = \theta$ である。

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{23} = \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_2 + \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_3, & \sigma_{24} = \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_2 + \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_4, \\ \sigma_{13} = \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_3, & \sigma_{14} = \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_4, \end{array} \right\}.$$

で、

$$h_{\sigma_{23}}(\theta) = \theta_1,\ h_{\sigma_{24}}(\theta) = \theta_1 + \theta_3,\ h_{\sigma_{13}}(\theta) = \theta_2,\ h_{\sigma_{14}}(\theta) = \theta_2 + \theta_3.$$

Laurent 多項式環 $\mathbf{C}[t^{\pm 1}] = \mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}]$ の微分作用素環 $D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}])$ は $\mathbf{C}$ 上 $3d$ 個の元 $t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_d, t_d^{-1}, \partial_1, \ldots, \partial_d$ で生成される非可換環

$$D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}]) = \mathbf{C}\langle t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}, \partial_1, \ldots, \partial_d \rangle \tag{1}$$

で、

$$[\partial_i, t_j] = \delta_{ij}, \quad [\partial_i, t_j^{-1}] = -\delta_{ij} t_j^{-2} \qquad (i, j = 1, \ldots, d) \tag{2}$$

及び他の生成元の組は可換という基本関係式を持つものである。任意の微分作用素 $P \in D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}])$ は Laurent 多項式環 $\mathbf{C}[t^{\pm 1}]$ に作用する。従って、$f \in R_A$ に対して、$P(f) \in \mathbf{C}[t^{\pm 1}]$ である。ここで、半群環 $R = R_A$ の微分作用素環 $D(R)$ を R に作用できる微分作用素 $P \in D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}])$ の成す $D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}])$ の部分環として定義する：

$$D(R) := \{ P \in D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}]) \,:\, P(R) \subset R \} \tag{3}$$

例 2.3 (例 2.1 のとき) $d = n = 1$, $A = (1)$. このとき、R は一変数の多項式環 $\mathbf{C}[t]$ で、微分作用素環 $D(R)$ は Weyl 代数 $\mathbf{C}\langle t, \partial_t \rangle$ である。

3 Order Filtration

微分作用素 $P = \sum_\alpha a_\alpha(t)\partial^\alpha$ ($a_\alpha \in \mathbf{C}[t^{\pm 1}]$) が m 階である (of order m) とは、$a_\alpha = 0$ (for all α with $|\alpha| > m$) かつ $a_\alpha \neq 0$ (for some α with

$|\alpha| = m)$ なることである。但し、$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d))$。
F_m を高々 m 階の微分作用素全体の集合とする：

$$
\begin{aligned}
F_m(D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}])) &= \{ \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(t)\partial^\alpha : a_\alpha \in \mathbf{C}[t^{\pm 1}] \} && (4) \\
F_m(D(R)) &= D(R) \cap F_m(D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}])) && (5)
\end{aligned}
$$

例えば、$F_m(D(R)) = 0$ $(m < 0)$、$F_0(D(R)) = R$、

$$
F_m(D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}])) = \bigoplus_{|\alpha| \le m} \mathbf{C}[t^{\pm 1}]\partial^\alpha
$$

である。さて、F は次の性質を有する。

1. $F_m(D(R)) \subset F_{m+1}(D(R)) \quad (\forall m)$,
2. $F_m(D(R))F_k(D(R)) \subset F_{m+k}(D(R)) \quad (\forall m, k)$,
3. $D(R) = \bigcup_m F_m(D(R))$,
4. 各 $F_m(D(R))$ は R 上有限。

F を $D(R)$ の order filtration と呼ぶ。

この filtration に対して、次数環を考える：

$$
\mathrm{Gr}(D(R)) := \mathrm{Gr}^F(D(R)) := \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} F_m(D(R))/F_{m-1}(D(R)) \qquad (6)
$$

次数環 $\mathrm{Gr}(D(R))$ は、可換環 $\mathrm{Gr}(D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}])) = \mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}, \xi_1, \ldots, \xi_d]$ の部分環である。とくに、可換環である。ここで、ξ_i は ∂_i が代表する元である。

注意 3.1 $t_i^{\pm}$ の weight を 0, ∂_i の weight を 1 としたとき、Gr^F は $P = \sum_\alpha a_\alpha(t)\partial^\alpha \in F_m \setminus F_{m-1}$ の initial part $\mathrm{in}_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}(P) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t)\xi^\alpha$ 全体から生成される環である。関係 $\partial_i t_i = t_i\partial_i + 1$ において、両辺の initial part をとると $\xi_i t_i = t_i \xi_i$ を得るから Gr^F は可換である。

Weyl 代数における単項式順序等については [4, Chapter 1] を参照。

4　有限性の問題

微分作用素環 $D(R)$ に関する基本的な有限性の問題としては以下のものがある。

問題 4.1 $D(R_A)$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成代数であるか？

問題 4.2 $D(R_A)$ は左（右）ネター環か？

注意 4.3 一般の微分作用素環については有限生成にも、左ネターにも、右ネターにもならない例が存在する ([1]):

$$R = \mathbf{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

問題 4.4 $\mathrm{Gr}(D(R_A))$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成代数 $\Longleftrightarrow$ 半群 $\mathbf{N}A$ は？である。

注意 4.5 $\mathrm{Gr}(D(R_A))$ について $\mathbf{C}$ 上有限生成代数であることとネター環であることとは同値である。実際、$\mathrm{Gr}(D(R_A))$ は可換環であるから Hibert の基底定理より有限生成ならネター環であり、一方 $\mathrm{Gr}(D(R_A))$ は $\mathbf{N}$ を index 集合とする次数環であるので、ネターならば有限生成である ([2, 定理 27.1] 参照)。

問題 4.4 の答がこの小論の主定理である：

定理 4.6 $\mathrm{Gr}(D(R_A))$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成代数 $\Longleftrightarrow$ 半群 $\mathbf{N}A$ は *scored* である。

「scored」は §6 で定義する。問題 4.1, 4.2 は、open であるが、定理 4.6 の結果、次が得られる。

系 4.7 半群 $\mathbf{N}A$ が *scored* なら、微分作用素環 $D(R_A)$ は $\mathbf{C}$ 上有限生成であり、また、左、右ネター環である。

定理 4.6 と系 4.7 は、定理 8.8 と系 8.9 として §8 で証明する。

5 Weight 分解

この節では、微分作用素環 $D(R_A)$ の構造に関する Jones の定理を述べよう。

まず、次の事実に注意しよう。

補題 5.1 $\theta_i := t_i\partial_i \in D(R_A)$ $(i = 1, \ldots, d)$.

証明. $\theta_i(t^{\mathbf{a}_j}) = \theta_i(t_1^{a_{1j}} \cdots t_d^{a_{dj}}) = a_{ij}t^{\mathbf{a}_j}$ だから、$\theta_i(R_A) \subset R_A$ が分かる。

-

さて、各格子点 $\mathbf{b} = {}^t(b_1, \dots, b_d) \in \mathbf{Z}^d$ に対して、weight space $D(R)_{\mathbf{b}}$ を

$$D(R)_{\mathbf{b}} := \{\, P \in D(R) \,:\, [\theta_i, P] = b_i P \quad (i = 1, \dots, d) \,\}$$

で定義する。但し、$[\theta_i, P] := \theta_i P - P\theta_i$ である。例えば、$t^{\mathbf{a}_j}$ の weight は $\mathbf{a}_j$ で、θ_i の weight は 0 である。よって、order filtration を考えたときの weight とは異なることに注意されたい。

明らかに、

$$D(R_A) = \bigoplus_{\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^d} D(R_A)_{\mathbf{b}} \tag{7}$$

が成り立つ。

まず、$\mathbf{N}A = \mathbf{Z}A = \mathbf{Z}^d$ の場合、即ち、R_A が Laurent 多項式環 $\mathbf{C}[t^{\pm 1}] = \mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ の場合を考えよう。このとき、

$$\begin{aligned} D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}]) &= \mathbf{C}\langle t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}, \partial_1, \dots, \partial_d \rangle \\ &= \mathbf{C}\langle t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}, \theta_1, \dots, \theta_d \rangle \end{aligned}$$

だから、

$$D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}])_{\mathbf{b}} = t^{\mathbf{b}} \mathbf{C}[\theta] \tag{8}$$

である。但し、$\mathbf{C}[\theta] := \mathbf{C}[\theta_1, \dots, \theta_d]$ と書いた。

Jones の定理を述べるために、$\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^d$ に対して、半群 $\mathbf{N}A$ の部分集合 $\Omega(\mathbf{b})$ を

$$\Omega(\mathbf{b}) = \{\, \mathbf{a} \in \mathbf{N}A : \ \mathbf{a} + \mathbf{b} \notin \mathbf{N}A \,\}$$

で定義する。

定理 5.2 (Jones [3], Theorem 3.3.1 in [5])

$$D(R_A) = \bigoplus_{\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^d} D(R_A)_{\mathbf{b}} = \bigoplus_{\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^d} t^{\mathbf{b}} \mathbf{I}(\Omega(\mathbf{b})).$$

ここで、

$$\mathbf{I}(\Omega(\mathbf{b})) := \{\, P \in \mathbf{C}[\theta] \,:\, P(\mathbf{c}) = 0 \quad (\forall \mathbf{c} \in \Omega_{\mathbf{b}}) \,\}$$

証明. まず、$D(R_A)_{\mathbf{b}} = D(R_A) \cap D(\mathbf{C}[t^{\pm 1}])_{\mathbf{b}}$ に注意しよう。(8) より、$t^{\mathbf{b}}P(\theta)$ が $D(R_A)$ に属する条件を考察すれば良い。

$$t^{\mathbf{b}}P(\theta)(t^{\mathbf{c}}) = t^{\mathbf{b}}P(\mathbf{c})(t^{\mathbf{c}}) = P(\mathbf{c})(t^{\mathbf{b}+\mathbf{c}})$$

であるから、

$$\begin{aligned} & t^{\mathbf{b}}P(\theta)(\mathbf{C}[\mathbf{N}A]) \subset \mathbf{C}[\mathbf{N}A] \\ \Longleftrightarrow\quad & (\mathbf{c} \in \mathbf{N}A,\ \mathbf{b}+\mathbf{c} \notin \mathbf{N}A \Rightarrow P(\mathbf{c}) = 0) \\ \Longleftrightarrow\quad & (P(\mathbf{c}) = 0 \quad \text{for } \forall \mathbf{c} \in \Omega_{\mathbf{b}}) \end{aligned}$$

よって、定理を得る。$\Box$

例 5.3 (例 2.1 のとき) このとき、$\mathbf{N}A = \mathbf{N}$ である。また、R は一変数の多項式環 $\mathbf{C}[t]$ で、微分作用素環 $D(R)$ は Weyl 代数 $\mathbf{C}\langle t, \partial_t \rangle$ であった。Jones の定理に従って、$b \in \mathbf{Z}$ に対して、集合 Ω_b を計算し、$D(R)_b$ を求めよう。$b \in \mathbf{N}$ なら $\Omega_b = \mathbf{N} \setminus (-b+\mathbf{N}) = \emptyset$ だから、$\mathbf{I}(\Omega(b)) = \mathbf{C}[\theta]$ で、

$$D(R)_b = t^b\mathbf{C}[\theta] \qquad (b \in \mathbf{N}).$$

次に、$b \in \mathbf{Z}_{\leq -1}$ の場合を考えよう。このとき、$\Omega_b = \mathbf{N} \setminus (-b+\mathbf{N}) = \{0, 1, \dots, -b-1\}$ だから、

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\Omega(b)) &= \theta(\theta-1)\cdots(\theta+b+1)\mathbf{C}[\theta] \\ &= t^{-b}\partial^{-b}\mathbf{C}[\theta] \end{aligned}$$

で、

$$D(R)_b = t^b t^{-b}\partial^{-b}\mathbf{C}[\theta] = \partial^{-b}\mathbf{C}[\theta] \quad (b \in \mathbf{Z}_{\leq -1})$$

を得る。

6 Scored Semigroups –定義と例–

6.1 定義

半群 $\mathbf{N}A$ は、次を満たすとき、**scored** (意味：刻み目を入れられた) と呼ばれる ([5])：任意の $\sigma \in \mathcal{F}$ に対して、$\mathbf{N} \setminus h_\sigma(\mathbf{N}A)$ は有限集合で、

$$\mathbf{N}A = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{F}} \{\, \mathbf{a} \in \mathbf{Z}^d \,:\, h_\sigma(\mathbf{a}) \in h_\sigma(\mathbf{N}A) \,\}. \tag{9}$$

つまり、半群 $\mathbf{N}A$ は、錘 $\mathbf{R}_{\geq 0}A$ 内の格子点の集合 $\mathbf{R}_{\geq 0}A \cap \mathbf{Z}^d$ から facets に平行な有限個の超平面 (刻み目) を除いたものに等しいとき、scored と呼ばれる。

例 6.1 正規な半群は scored である。(半群 $\mathbf{N}A$ は、錘 $\mathbf{R}_{\geq 0}A$ 内の格子点の集合 $\mathbf{R}_{\geq 0}A \cap \mathbf{Z}^d$ と等しいとき正規と呼ばれる。) これは、刻み目が 0 個の場合である。

例 6.2

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

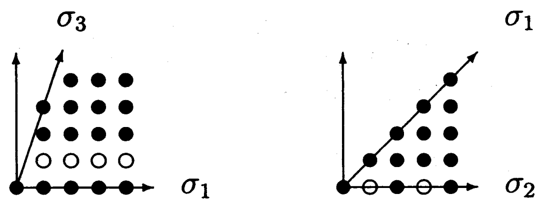

図 1: 半群 $\mathbf{N}A_1$ (scored である), 半群 $\mathbf{N}A_2$ (scored でない)

6.2 Scored 性と Cohen-Macaulay 性

半群環 $\mathbf{C}[\mathbf{N}A]$ が Cohen-Macaulay である (半群 $\mathbf{N}A$ が Cohen-Macaulay であるとも言うことにする。) ための必要十分条件は次の Serre の条件 (S2) とさらにある単体的複体のホモロジーが消滅することと表される ([7])。

$$\mathbf{N}A = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{F}} (\mathbf{N}A + \mathbf{Z}(A \cap \sigma)). \tag{S2}$$

命題 6.3 半群が *scored* なら (S2) を満たす。

証明. 半群 $\mathbf{N}A$ が scored のとき、任意の $\sigma \in \mathcal{F}$ に対して、

$$\mathbf{N}A + \mathbf{Z}(A \cap \sigma) = \{\, \mathbf{a} \in \mathbf{Z}^d \,:\, h_\sigma(\mathbf{a}) \in h_\sigma(\mathbf{N}A) \,\} \tag{10}$$

が成り立つことを示せば良い。

等式(10) において、"$\subset$" は h_σ の定義より明らかなので、"$\supset$" を示そう。

$\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^d$ かつ $h_\sigma(\mathbf{a}) \in h_\sigma(\mathbf{N}A)$ とする。σ と異なる任意の $\sigma' \in \mathcal{F}$ に対し、$\mathbf{a}_i \notin \sigma'$ かつ $\mathbf{a}_i \in \sigma$ なる $\mathbf{a}_i \in A$ が存在する。$h_{\sigma'}(\mathbf{a}_i) > 0$ と $\mathbf{N} \setminus h_{\sigma'}(\mathbf{N}A)$ が有限であることより、$h_{\sigma'}(\mathbf{a}+m_i\mathbf{a}_i) \in h_{\sigma'}(\mathbf{N}A)$ なる $m_i \in \mathbf{N}$ が存在する。

この議論を σ と異なる全ての $\sigma' \in \mathcal{F}$ に対して行うことにより、

$$h_{\sigma'}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \in h_{\sigma'}(\mathbf{N}A) \qquad (\forall \sigma' \in \mathcal{F} \setminus \{\sigma\})$$

を満たす $\mathbf{b} \in \mathbf{N}(A \cap \sigma)$ の存在が分かる。仮定から

$$h_\sigma(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = h_\sigma(\mathbf{a}) \in h_\sigma(\mathbf{N}A)$$

でもあるので、$\mathbf{N}A$ が scored であることから、$\mathbf{a}+\mathbf{b} \in \mathbf{N}A$ が分かる。故に、$\mathbf{a} \in \mathbf{N}A + \mathbf{Z}(A \cap \sigma)$ である。▯

例 6.4 例 6.2 の A_1, A_2 は (S2) を満たす。さらに、これらは Cohen-Macaulay にもなり、A_2 は Cohen-Macaulay だが、scored でない例を与える。

例 6.5 例 6.2 の A_1 を 2 つ並べたもの：

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

は scored だが、Cohen-Macaulay でない ([7])。

7 Weight 分解 (Scored Semigroups)

この節では、scored semigroup $\mathbf{N}A$ に対して、微分作用素環 $D(R_A)$ の各 weight space を Jones の定理に従って計算しよう。

以下、$\mathbf{N}A$ は scored とし、

$$\mathbf{N} \setminus h_\sigma(\mathbf{N}A) = \{\, c(\sigma)_1 < \cdots < c(\sigma)_{m(\sigma)} \,\}. \tag{11}$$

とする。ここで、$c(\sigma)_1 > 0$ である。また、

$$M := \max_{\sigma \in \mathcal{F}} c(\sigma)_{m(\sigma)} + 1. \tag{12}$$

とおく。

次の補題は明らかである。

補題 7.1

$$\begin{aligned} & h_\sigma(\mathbf{N}A) \setminus (-h_\sigma(\mathbf{b}) + h_\sigma(\mathbf{N}A)) \\ = \ & (\{ n \in \mathbf{N} : n < -h_\sigma(\mathbf{b}) \quad \textit{or} \\ & \qquad n = -h_\sigma(\mathbf{b}) + c(\sigma)_1, \dots, -h_\sigma(\mathbf{b}) + c(\sigma)_{m(\sigma)} \})) \\ & \qquad \setminus \{ c(\sigma)_1, \dots, c(\sigma)_{m(\sigma)} \}. \end{aligned} \tag{13}$$

$\sigma \in \mathcal{F}, \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^d$ に対して、

$$d_\sigma(\mathbf{b}) := {}^\sharp (h_\sigma(\mathbf{N}A) \setminus (-h_\sigma(\mathbf{b}) + h_\sigma(\mathbf{N}A)))$$

とおく。

系 7.2 *1.* $h_\sigma(\mathbf{b}) = 0$ なら、$d_\sigma(\mathbf{b}) = 0$.

2. $h_\sigma(\mathbf{b}) > c(\sigma)_{m(\sigma)}$ なら、$d_\sigma(\mathbf{b}) = 0$.

3. $h_\sigma(\mathbf{b}) < -c(\sigma)_{m(\sigma)}$ なら、

$$\begin{aligned} & h_\sigma(\mathbf{N}A) \setminus (-h_\sigma(\mathbf{b}) + h_\sigma(\mathbf{N}A)) \\ & = (\{ n \in \mathbf{N} : n < -h_\sigma(\mathbf{b}) \} \setminus \{ c(\sigma)_1, \dots, c(\sigma)_{m(\sigma)} \}) \\ & \qquad \coprod \{ -h_\sigma(\mathbf{b}) + c(\sigma)_1, \dots, -h_\sigma(\mathbf{b}) + c(\sigma)_{m(\sigma)} \}, \end{aligned} \tag{14}$$

とくに、$d_\sigma(\mathbf{b}) = -h_\sigma(\mathbf{b})$.

証明. 補題 7.1 より容易に得られる。▯

補題 7.3

$$\mathbf{I}(\Omega(\mathbf{b})) = (P_\mathbf{b}),$$

但し、

$$P_\mathbf{b} = \prod_{\sigma \in \mathcal{F}} \prod_{m \in h_\sigma(\mathbf{N}A) \setminus (-h_\sigma(\mathbf{b}) + h_\sigma(\mathbf{N}A))} (h_\sigma(\theta) - m). \tag{15}$$

証明. 半群 $\mathbf{N}A$ は scored なので、$\mathbf{a} \in \Omega(\mathbf{b})$ は、$h_\sigma(\mathbf{a}) \in h_\sigma(\mathbf{N}A)$ for all $\sigma \in \mathcal{F}$ かつ $h_{\sigma'}(\mathbf{a}) \notin -h_{\sigma'}(\mathbf{b}) + h_{\sigma'}(\mathbf{N}A)$ for some $\sigma' \in \mathcal{F}$ と同値である。よって定理 5.2 により得られる。▯

$$\mathrm{Gr}(D(R_A)) = \bigoplus_{\mathbf{b}\in\mathbf{Z}^d} t^{\mathbf{b}}\mathbf{C}[\overline{\theta}](\overline{P}_{\mathbf{b}}), \tag{16}$$

但し、

$$\begin{aligned} \overline{\theta_i} &= t_i\xi_i \\ \overline{P}_{\mathbf{b}} &= \prod_{\sigma\in\mathcal{F}} h_\sigma(\overline{\theta})^{d_\sigma(\mathbf{b})} \end{aligned} \tag{17}$$

はそれぞれの $\mathrm{Gr}(D(R_A))$ での像を表す。

証明.

$$F_m(D(R_A)) = \bigoplus_{\mathbf{b}\in\mathbf{Z}^d} F_m(D(R_A)) \cap D(R_A)_{\mathbf{b}}$$

が任意の $m \in \mathbf{N}$ について成立し、

$$F_m(D(R_A)) \cap D(R_A)_{\mathbf{b}} = \begin{cases} 0 & (m < d_\sigma(\mathbf{b})) \\ F_{m-d_\sigma(\mathbf{b})}(t^{\mathbf{b}}\mathbf{C}[\theta])P_{\mathbf{b}} & (m \geq d_\sigma(\mathbf{b})) \end{cases}$$

であるので系を得る。▯

8 有限生成性

この節では、いよいよ scored 半群 $\mathbf{N}A$ に対し、$D(R_A), \mathrm{Gr}(D(R_A))$ が有限生成であることを証明する。証明のキーポイントは半群 $\mathbf{N}A$ の score (刻み目) の状態に合わせて適切に格子 $\mathbf{Z}^d$ を分割することである。

簡単のため、錘 $\mathbf{R}_{\geq 0}A$ は強凸 (即ち、$\mathbf{R}_{\geq 0}A$ は 0 でない部分ベクトル空間を含まない。) と仮定する。そうでない場合も多少の修正を加えれば、以下の議論で良い。

錘 $\tau = \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{v}_\tau$ が A から決まる configuration の **ray** であるとは、$\mathbf{v}_\tau$ がゼロでない整ベクトルで、$\mathbf{R}\tau$ が幾つかの超平面 $(h_\sigma = 0)$ $(\sigma \in \mathcal{F})$ の交わりとなっていることとする。$\mathrm{Ray}(A)$ を A から決まる configuration の ray 全体の集合とする。ray $\tau \in \mathrm{Ray}(A)$ に対して、$\mathbf{u}_\tau$ を $\tau \cap \mathbf{Z}^d$ に属するベクトルで、任意の facet $\sigma \in \mathcal{F}$ に対して、

1. $h_\sigma(\mathbf{u}_\tau) \geq M \quad$ if $\quad h_\sigma(\mathbf{v}_\tau) > 0$,

2. $h_\sigma(\mathbf{u}_\tau) = 0 \quad \text{if} \quad h_\sigma(\mathbf{v}_\tau) = 0,$
3. $h_\sigma(\mathbf{u}_\tau) \leq -M \quad \text{if} \quad h_\sigma(\mathbf{v}_\tau) < 0.$

を満たすもの ($\mathbf{u}_\tau$ の選び方は無数にある。"長さ最小" という条件をつければ一意的) とする。

例 8.1 (例 2.2 からの続き)

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

とする。A が正規なら $M = 0$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
(h_{\sigma_{23}} = 0) \cap (h_{\sigma_{13}} = 0) &= \mathbf{R}^t(0,0,1) \\
(h_{\sigma_{23}} = 0) \cap (h_{\sigma_{24}} = 0) &= \mathbf{R}^t(0,1,0) \\
(h_{\sigma_{23}} = 0) \cap (h_{\sigma_{14}} = 0) &= \mathbf{R}^t(0,1,-1) \\
(h_{\sigma_{13}} = 0) \cap (h_{\sigma_{24}} = 0) &= \mathbf{R}^t(1,0,-1) \\
(h_{\sigma_{13}} = 0) \cap (h_{\sigma_{14}} = 0) &= \mathbf{R}^t(1,0,0) \\
(h_{\sigma_{24}} = 0) \cap (h_{\sigma_{14}} = 0) &= \mathbf{R}^t(1,1,-1)
\end{aligned}$$

である。よって、$\{\mathbf{u}_\tau : \tau \in \mathrm{Ray}(A)\}$ として

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \pm^t(0,0,1), & \pm^t(0,1,0), & \pm^t(0,1,-1) \\ \pm^t(1,0,-1), & \pm^t(1,0,0), & \pm^t(1,1,-1) \end{array} \right\}$$

がとれる。ここで、$\{\mathbf{u}_\tau : \tau \in \mathrm{Ray}(A)\}$ は、

$$\{\pm\mathbf{v} : \mathbf{v} \textit{ spans a 1-dimensional face of } \mathbf{R}_{\geq 0}A\}.$$

より、多くのベクトルを含むことに注意されたい。

さて、ν を $\mathcal{F}$ から、集合

$$\tilde{M} := \{-\infty\} \cup \{\infty\} \cup \{m \in \mathbf{Z} : |m| < M\}$$

への写像とする。$\mathbf{Z}^d$ の部分集合 S_ν を

$$S_\nu := \{\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^d : h_\sigma(\mathbf{b}) = \nu(\sigma) \quad \text{for all } \sigma \in \mathcal{F}\} \tag{18}$$

で定義する。但し、$h_\sigma(\mathbf{b}) = \infty, -\infty$ は各々$h_\sigma(\mathbf{b}) \geq M, \leq -M$ を意味するとする。S_ν が空集合になることもある。明らかに、

$$\mathbf{Z}^d = \bigcup_\nu S_\nu \tag{19}$$

であり、格子の分割が得られた。さて、さらに、

$$S_{\nu,\mathbf{R}} := \{\, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^d \,:\, h_\sigma(\mathbf{b}) = \nu(\sigma) \quad \text{for all } \sigma \in \mathcal{F} \,\}, \tag{20}$$

$$C_{\nu,\mathbf{R}} := \left\{ \mathbf{b} \in \mathbf{R}^d \,:\, \begin{array}{ll} h_\sigma(\mathbf{b}) = 0 & \text{if } \nu(\sigma) \neq \pm\infty \\ h_\sigma(\mathbf{b}) \geq 0 & \text{if } \nu(\sigma) = \infty \\ h_\sigma(\mathbf{b}) \leq 0 & \text{if } \nu(\sigma) = -\infty \end{array} \right\}, \tag{21}$$

$$C_\nu := \{\, \mathbf{u}_\tau \,:\, \tau \subset C_{\nu,\mathbf{R}} \,\} \tag{22}$$

とおく。すると

$$S_\nu = \mathbf{Z}^d \cap S_{\nu,\mathbf{R}} \tag{23}$$

であって、次の補題 8.2 と補題 8.3 が成り立つ。

補題 8.2 V_ν を $S_{\nu,\mathbf{R}}$ の頂点全体の集合とする。このとき、

$$S_{\nu,\mathbf{R}} = C_{\nu,\mathbf{R}} + \mathrm{conv}(V_\nu) \tag{24}$$

である。

証明. 凸多面体 (convex polyhedron) P に対し、

$$\{\, y \,:\, x + y \in P \quad (\forall x \in P) \,\}$$

を P の characteristic cone (または recession cone) という。$C_{\nu,\mathbf{R}}$ は $S_{\nu,\mathbf{R}}$ の characteristic cone である。よって、主張は凸多面体の一般的事実である。[6, §8.9 (28)] を参照。▯

補題 8.3

$$C_{\nu,\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{\geq 0} C_\nu. \tag{25}$$

証明. これは、強凸錘がその 1 次元の面から生成されるという事実から従う。▯

命題 8.4 集合 S_ν は、C_ν-有限。即ち、有限個の $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in S_\nu$ があって、$S_\nu = \cup_{j=1}^r ((\mathbf{N}C_\nu) + \mathbf{v}_j)$ となる。但し、$\mathbf{N}C_\nu = \sum_{\mathbf{u}\in C_\nu} \mathbf{N}\mathbf{u}$.

証明.

$$G_\nu := \left(\{ \sum_{\mathbf{u}\in C_\nu} a_\mathbf{u}\mathbf{u} \,:\, 0 \le a_\mathbf{u} < 1 \} + \mathrm{conv}(V_\nu) \right) \cap \mathbf{Z}^d. \tag{26}$$

とおく。すると、G_ν は有限集合である。$G_\nu = \{ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \}$ とすると、$S_\nu \supset \cup_{j=1}^r ((\mathbf{N}C_\nu) + \mathbf{v}_j)$ である。

いま、$\mathbf{v} \in S_\nu$ とする。すると補題 8.2 と補題 8.3 から、$c_\mathbf{u} \in \mathbf{R}_{\ge 0}$ と $\mathbf{w} \in V_\nu$ があって、$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{u}\in C_\nu} c_\mathbf{u}\mathbf{u} + \mathbf{w}$ となる。従って、

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{u}\in C_\nu} \lfloor c_\mathbf{u} \rfloor \mathbf{u} + (\sum_{\mathbf{u}\in C_\nu} (c_\mathbf{u} - \lfloor c_\mathbf{u} \rfloor)\mathbf{u} + \mathbf{w}) \in \cup_{j=1}^r ((\mathbf{N}C_\nu) + \mathbf{v}_j).$$

▯

例 8.5 (例 2.2 の続き)

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

とする。A は正規だから、$M = 0$.

さて、ν_1 を

$$\nu_1(\sigma_{23}) = \nu_1(\sigma_{14}) = \nu_1(\sigma_{13}) = \infty, \, \nu_1(\sigma_{24}) = -\infty.$$

で定義される $\mathcal{F}$ から $\tilde{M} = \{ -\infty, \infty \}$ への写像とする。すると、

$$\begin{aligned} S_{\nu_1} &= \{ \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^3 \,:\, b_1 \ge 0, \, b_2 \ge 0, \, b_2 + b_3 \ge 0, \, b_1 + b_3 \le 0 \} \\ &= \{ \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^3 \,:\, b_1 \ge 0, \, b_2 + b_3 \ge 0, \, b_1 + b_3 \le 0 \}, \end{aligned}$$

で、

$$\begin{aligned} C_{\nu_1} &= \{ {}^t(0,1,0), \, {}^t(0,1,-1), \, {}^t(1,1,-1) \}, \\ V_{\nu_1} &= \{ \mathbf{0} \}, \\ G_{\nu_1} &= \{ \mathbf{0} \}. \end{aligned}$$

$$S_{\nu_1} = \mathbf{N}C_{\nu_1}$$

例 8.6 (例 6.1 の A_1)

$$A_1 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

とする。このとき、

$$\mathcal{F} = \{\, \sigma_1 = \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_1,\ \sigma_3 = \mathbf{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_3 \,\},$$

$h_{\sigma_1}(\theta) = \theta_2$, $h_{\sigma_3}(\theta) = 3\theta - \theta_2$ で、

$$\mathbf{N} \setminus h_{\sigma_1}(\mathbf{N}A_1) = \{\, 1 \,\}, \quad \mathbf{N} \setminus h_{\sigma_3}(\mathbf{N}A_1) = \emptyset$$

である。よって、$M = 2$ で、$\tilde{M} = \{\, \pm\infty \,\} \cup \{\, -1, 0, 1 \,\}$ さらに、

$$\{\, \mathbf{u}_\tau \,:\, \tau \in \mathrm{Ray}(A_1) \,\} = \{\, \pm\mathbf{a}_1, \pm\mathbf{a}_3 \,\}.$$

である。次の写像 ν_1 と ν_2 を考える:

$$\begin{array}{ll} \nu_1(\sigma_1) = 1 & \nu_1(\sigma_3) = -1 \\ \nu_2(\sigma_1) = 1 & \nu_1(\sigma_3) = -\infty. \end{array}$$

すると、

$$\begin{aligned}
S_{\nu_1} &= \{\, \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^2 \,:\, b_2 = 1,\, 3b_1 - b_2 = -1 \,\} = \{\, {}^t(0,1) \,\}, \\
S_{\nu_2} &= \{\, \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^2 \,:\, b_2 = 1,\, 3b_1 - b_2 \leq -2 \,\}, \\
C_{\nu_1,\mathbf{R}} &= \{\, \mathbf{0} \,\}, \quad C_{\nu_1} = \emptyset, \\
C_{\nu_2,\mathbf{R}} &= \{\, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2 \,:\, b_2 = 0,\, 3b_1 - b_2 \leq 0 \,\} \\
&= \{\, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2 \,:\, b_2 = 0,\, b_1 \leq 0 \,\}, \quad C_{\nu_2} = \{\, -\mathbf{a}_1 \,\}, \\
S_{\nu_2,\mathbf{R}} &= C_{\nu_2,\mathbf{R}} + {}^t(-1/3, 1), \\
G_{\nu_1} &= \{\, {}^t(0,1) \,\} \\
G_{\nu_2} &= \{\, -c\mathbf{a}_1 + {}^t(-1/3, 1) \in \mathbf{Z}^2 \,:\, 0 \leq c < 1 \,\} = \{\, {}^t(-1,1) \,\}, \\
S_{\nu_2} &= \mathbf{N}(-\mathbf{a}_1) + {}^t(-1,1).
\end{aligned}$$

命題 8.7 $\mathbf{b} \in S_\nu$ で $\mathbf{u} \in C_\nu$ とする。このとき、

$$t^{\mathbf{b}+\mathbf{u}} P_{\mathbf{b}+\mathbf{u}}(\theta) = t^{\mathbf{u}} P_{\mathbf{u}}(\theta) \cdot t^{\mathbf{b}} P_{\mathbf{b}}(\theta).$$

証明. $\mathbf{u}=\mathbf{u}_\tau$ とする。系 7.2 (2) より、

$$P_{\mathbf{b}}=\prod_{\nu(\sigma)\neq+\infty}\ \prod_{m\in h_\sigma(\mathbf{N}A)\setminus(-h_\sigma(\mathbf{b})+h_\sigma(\mathbf{N}A))}(h_\sigma(\theta)-m). \tag{28}$$

もし $\nu(\sigma)\neq\pm\infty$ ならば、$h_\sigma(\mathbf{u}_\tau)=0$ で、従って、$h_\sigma(\mathbf{b}+\mathbf{u}_\tau)=h_\sigma(\mathbf{b})$. もし $\nu(\sigma)=\infty$ ならば、$h_\sigma(\mathbf{b}),h_\sigma(\mathbf{u}_\tau)\geq M$ で、従って、$h_\sigma(\mathbf{b}+\mathbf{u}_\tau)\geq M$.

いま、$\nu(\sigma)=-\infty$ としよう。すると、系 7.2 (3) より、

$$\begin{aligned}
&h_\sigma(\mathbf{N}A)\setminus(-h_\sigma(\mathbf{b}+\mathbf{u}_\tau)+h_\sigma(\mathbf{N}A))\\
&=\left(\{\,n\in\mathbf{N}:\,n<-h_\sigma(\mathbf{b}+\mathbf{u}_\tau)\,\}\setminus\{\,c(\sigma)_1,\ldots,c(\sigma)_{m(\sigma)}\,\}\right)\\
&\qquad\coprod\{\,-h_\sigma(\mathbf{b}+\mathbf{u}_\tau)+c(\sigma)_1,\ldots,-h_\sigma(\mathbf{b}+\mathbf{u}_\tau)+c(\sigma)_{m(\sigma)}\,\}\\
&=\left(\{\,n\in\mathbf{N}:\,n<-h_\sigma(\mathbf{b})\,\}\setminus\{\,c(\sigma)_1,\ldots,c(\sigma)_{m(\sigma)}\,\}\right)\\
&\qquad\coprod\{\,-h_\sigma(\mathbf{b})\leq n<-h_\sigma(\mathbf{b}+\mathbf{u}_\tau)\,\}\\
&\qquad\qquad\coprod(-h_\sigma(\mathbf{b})+\{\,-h_\sigma(\mathbf{u}_\tau)+c(\sigma)_1,\ldots,-h_\sigma(\mathbf{u}_\tau)+c(\sigma)_{m(\sigma)}\,\})\\
&=(h_\sigma(\mathbf{N}A)\setminus(-h_\sigma(\mathbf{b})+h_\sigma(\mathbf{N}A)))\\
&\qquad\qquad\cup(-h_\sigma(\mathbf{b})+(h_\sigma(\mathbf{N}A)\setminus(-h_\sigma(\mathbf{u}_\tau)+h_\sigma(\mathbf{N}A)))).
\end{aligned}$$

∎

定理 8.8 半群 $\mathbf{N}A$ が *scored* ならば、$D(R_A)$ と $\mathrm{Gr}(D(R_A))$ は有限生成である。

証明. これは命題 8.4 と命題 8.7 から明らか。実際、$D(R_A)$ は $\theta_1,\ldots,\theta_d$ と $t^{\mathbf{b}}P_{\mathbf{b}}$ ($\mathbf{b}\in\cup_\nu(C_\nu\cup G_\nu)$) で生成され、$\mathrm{Gr}(D(R_A))$ は $\overline{\theta}_1,\ldots,\overline{\theta}_d$ と $t^{\mathbf{b}}\overline{P}_{\mathbf{b}}$ ($\mathbf{b}\in\cup_\nu(C_\nu\cup G_\nu)$) で生成される。∎

系 8.9 半群 $\mathbf{N}A$ が *scored* ならば、

1. $\mathrm{Gr}(D(R_A))$ はネター環。
2. $D(R_A)$ は左ネターでも右ネターでもある。

証明. (1) は Hilbert の基底定理から得られる。(2) は微分作用素の階数に関する帰納法を使う標準的議論により得られる：$\{\,I_n\,\}_{n=1,2,\ldots}$ を $D(R_A)$ の左イデアルの増大列とする。各 I_n に filtration F を $F_m(I_n):=F_m(D(R_A))\cap I_n$ で定義する。すると、$\{\,\mathrm{Gr}(I_n)\,\}$ は $\mathrm{Gr}(D(R_A))$ のイデアルの増大列。よって、(1) より、$\mathrm{Gr}(I_{N+k})=\mathrm{Gr}(I_N)$ for all $k\in\mathbf{N}$ を満たす N がある。$I_N\subsetneq I_{N+k}$ と仮定し、$F_m(I_N)\subsetneq F_m(I_{N+k})$ となる最小の m をとる。すると、$F_{m-1}(I_N)=F_{m-1}(I_{N+k})$ であるから、$\mathrm{Gr}_m(I_N)=\mathrm{Gr}_m(I_{N+k})$ より $F_m(I_N)=F_m(I_{N+k})$ が得られる。これは m の取り方に矛盾する。∎

参考文献

[1] Bernstein, I.N., Gel'fand, I.M., Gel'fand, S.I.: Differential operators on a cubic cone. Russian Math. Surveys **27** (1972), 169–174.

[2] 堀田良之: 代数入門 –群と加群–, 裳華房, (1987).

[3] Jones, A.G. : Rings of differential operators on toric varieties. Proc. Edinburgh Math. Soc. **37** (1994), 143–160.

[4] Saito, M., Sturmfels, B., Takayama, N.: *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations*. Algorithms and Computation in Mathematics **6**, (2000) Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[5] Saito, M., Traves, W.N.,: Differential algebras on semigroup algebras. AMS Contemporary Math. **286** (2001) 207–226.

[6] Schrijver, A.: *Theory of Linear and Integer Programming*. (1986) Wiley Interscience, Chichester.

[7] Trung, N.V, Hoa, L.T.: Affine semigroups and Cohen-Macaulay rings generated by monomials. Trans. of AMS **298** (1986) 145–167.

M. Saito
Department of Mathematics
Hokkaido University
Sapporo, 060-0810
Japan
e-mail: saito@math.sci.hokudai.ac.jp

W.N. Traves
Department of Mathematics
US Naval Academy
572C Holloway Road
Annapolis MD, 21402
USA
e-mail:traves@usna.edu